Circle packing immersions form regulary exhaustible surfaces

田辺, 正晴

数理解析研究所講究録
893 巻 1995 年 141-149

Circle packing immersions form regulary exhaustible surfaces

東工大　理　田辺正晴　(Masaharu Tanabe)

K. Callahan, B. Rodin "Circle packing immersions form regulary exhaustible surfaces" Complex Variables 1993 vol. 21, 171-177 より

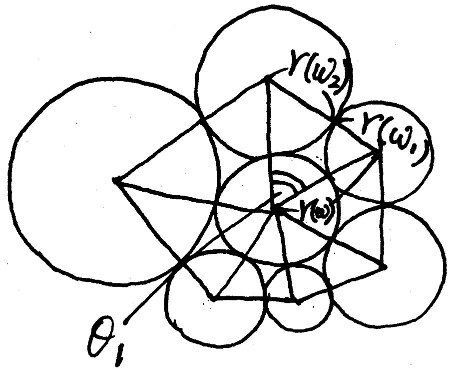
regular hexagonal circle packingからのcircle packing immersion により形成される multisheeted surface が．regularly exhaustible であり．Ahlfors の被覆面の理論が適用できることを示す。

定義及び定理

hexagonal lattice (HL) : $HL=\{m+ne^{i\pi/3}; m, n \in \mathbb{Z}\}$。原点0は of generation 0．0のまわりの6つの点は of generation 1．…として generation を定義する。$n>0$に対して，$6n$コの of generation n となる点が存在する。半径1/2の円でHLの各点を中心に$\mathbb{C}$－平面をうめれば <u>regular hexagonal circle packing of the plane (HCP)</u> が得られる．

radius function : HLから$\mathbb{R}^+$への function を radius function とよぶ。$r: HL\to\mathbb{R}^+$; radius function

<u>angle sum of r at $w \in HL$</u>を以下のように定義する。$w_1, \cdots, w_6$をwのneighboursとする。(1, …, 6は反時計回りにとる。) w, w_i, w_{i+1} ($i=1, \cdots, 6$, $w_7 \equiv w_1$)に対して、半径$r(w)$, $r(w_i)$, $r(w_{i+1})$なる3つの互いに接する円を考える。θ_iは3つの円の中心を頂点とする、三角形の半径$r(w)$の円に属する頂点の角度とする。



$\theta_1 + \cdots + \theta_6$をangle sum of r at $w \in HL$とよぶ。

radius function of a circle packing immersion : angle sum of $r : HL \to \mathbb{R}^+$が$\forall w \in HL$で2πのときrをこうよぶ。

radius function rから、multisheeted surface Fを構成できる。rに従って円を平面におくことにより、互いに接し合う3つの円の中心を頂点とする三角形の集合が得られる。これらの三角形は、自明な辺の同一視を除いて、disjointであるとして、三角形をはり合わせてゆくことにより、Fが得られる。Fをsurface formed by the circle packing immersion r とよぶ。

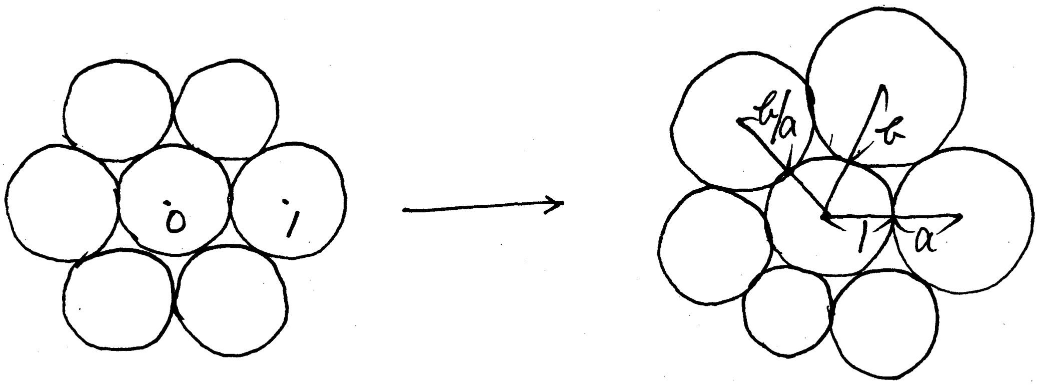
Theorem 1. F; surface formed by a circle packing immersion. F は regularly exhaustible. F_n を generation $\leq n$ の円とそのすき間からなる F の subset とし、$A(n)$, $L(n)$ を F_n のそれぞれ面積, boundary の長さ (in spherical metric) とすると.

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L(n)}{A(n)} = 0 .$$

Theorem 2. F の finite な除外値は高々 1 つ。

Peter Doyle による circle packing immersion の例
$r_c(\omega) = |e^{c\omega}|$ for $\forall \omega \in HL$, where $c \in \mathbb{C}$. $\rho_0 = r_c(\omega_0)$ とすると. ω_0 の 6 つの neighbours の r_c の値は反時計まわりに.

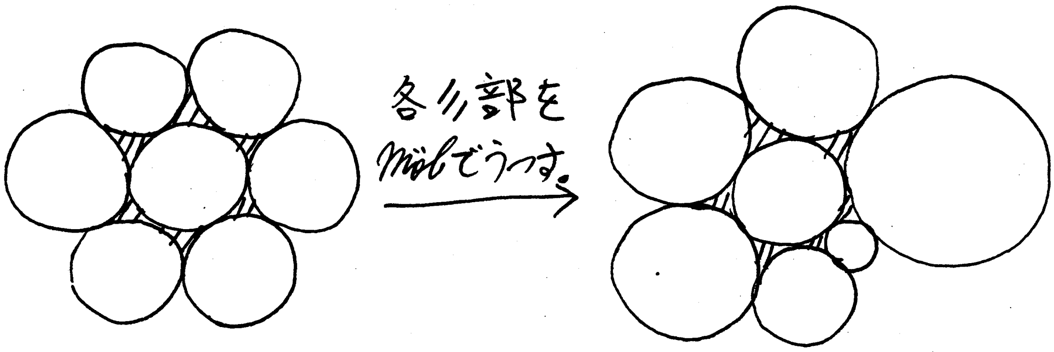
$a\rho_0$, $b\rho_0$, $(b/a)\rho_0$, $(1/a)\rho_0$, $(1/b)\rho_0$, $(a/b)\rho_0$
$(a = |e^c|,\ b = |e^{c\alpha}|,\ \alpha = e^{i\pi/3})$。このとき中心の円での angle sum は 2π になっている。特に $c = 0.1 - 0.4i$ のときは. $\omega_0 = 0$ とすると. $\rho_0 = 1 = r_c(0)$, $a = |e^{0.1-0.4i}| \fallingdotseq 1.1$
$b = |e^{c(i\pi/3)}| \fallingdotseq 1.5$, $b/a \fallingdotseq 1.3$, $1/a \fallingdotseq 0.99$, $1/b \fallingdotseq 0.67$, $a/b \fallingdotseq 0.74$.



Open Question: $r: HL \to \mathbb{R}^+$; radius function for a circle packing immersion. となり合う任意の$w, w' \in HL$に関して、$0<\delta<r(w)/r(w')<M<\infty$ なる定数δ, Mが存在するか？

このquestionが肯定的に解決されれば、$f:\mathbb{C}\to F$は quasiregularとなり、multisheeted image Fは regularly exhaustibleとなる。

$f:\mathbb{C}\to F$を明確に構成したければ、以下のようにしてもよい。HCPの各circular triangle interstice からrにより得られるcircular triangle interstice への Möbius transformation を考える。



このとき、中心の円周上で変換はC- bi-Lipschitz になっていて($C\in\mathbb{R}^+$)円の内部へのC-q.c. extension 可。こうして、continuous map $f:\mathbb{C}\to F$が得られる。

Proof of regularly exhaustibility

$f:\mathbb{C}\to F$ given. F_n: Fのsubset で generation $\le n$の円とそれらのすき間からなる。$\{F_n\}$は$F\to\hat{\mathbb{C}}$の exhaustion
$A(n)$, $L(n)$はそれぞれF_nの面積, boundary の長さ(in spherical metric)とする。C_{nj} $(j=1,\cdots,6n)$; HCP における generation $n\ge1$の$6n$コの円とする。$\hat{r}_{nj}$; $f(C_{nj})$の半径の長さ. $P(n)=\sum_{j=1}^{6n}2\hat{r}_{nj}$ と define。このとき半径$\hat{r}_{nj}$の disk の円周の長さは$2\pi\sin\hat{r}_{nj}$で.

$$L(n)\le\sum_{j=1}^{6n}2\pi\sin\hat{r}_{nj}\le2\pi\sum_{j=1}^{6n}\hat{r}_{nj}=\pi P(n)\cdots(1)$$

$\hat{a}_{nj}=2\pi(1-\cos\hat{r}_{nj})$; $f(C_{nj})$の面積

$$4t^2\le2\pi^2(1-\cos t)\qquad\text{for }0\le t\le\pi$$

だから.

$$\hat{r}_{nj}^2\le\frac{\pi}{4}\hat{a}_{nj}\qquad(2)$$

$\hat{\alpha}_n=\sum_{j=1}^{6n}\hat{a}_{nj}$ とおくと.

$$\hat{\alpha}_n<A(n)-A(n-1)\qquad(3)$$

Schwarz's ineq. より. $\{\sum_{j=1}^{6n}\hat{r}_{nj}\}^2\le6n\sum_{j=1}^{6n}\hat{r}_{nj}^2$ だから.

$$P^2(n)=\{\sum_{j=1}^{6n}2\hat{r}_{nj}\}^2\le4\cdot6n\sum\hat{r}_{nj}^2\underset{(2)}{\le}6\pi n\hat{\alpha}_n\;(4)$$

(4)から $\sum_n (\alpha_n / P^2(n))$ は発散することがわかる。

$\{n \geq 1;\ P(n) < A^{3/4}(n)\}$ は無限コの元を含む。それは，

$\mathcal{N} = \{n \geq 1;\ P(n) \geq A^{3/4}(n)\}$ とおけば，

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\alpha_n}{P^2(n)} \leq \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{A(n) - A(n-1)}{A^{3/2}(n)} \leq \int_{A(0)}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} < \infty$$

であり，$\sum_n (\alpha_n / P^2(n))$ が発散するためには，$\{n \geq 1;\ P(n) < A^{3/4}(n)\}$ が ∞ コの元をもたねばならぬからである。

$\{n_i\} = \{n \geq 1;\ P(n) < A^{3/4}(n)\}$，$n_i \to \infty$ としよう。

$A(n) \to \infty$，$A(n) \to M < \infty$ as $n \to \infty$ の2つに場合わけする。

$A(n) \to \infty$ のとき：(1)より

$$\frac{L(n_i)}{A(n_i)} \leq \frac{\pi P(n_i)}{A(n_i)} < \frac{\pi A^{3/4}(n_i)}{A(n_i)} \to 0$$

だから、F は *regularly exhaustible*。

$A(n) \to M < \infty$ のとき：(4)より

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{P^2(n)}{6\pi n} \leq \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \leq A(N) \leq M.$$

だから $\inf \{P(n);\ 1 \leq n\} = 0$。($= \varepsilon > 0$ ならば，左辺 $\geq (\varepsilon^2/6\pi) \sum 1/n$ *contradiction*。)

(1)より $\inf \{L(n);\ 1 \leq n < \infty\} = 0$。$L(n_i) \to 0$ as $n_i \to \infty$ なるよう $\{n_i\}$ をとれば，

$$\lim \frac{L(n_i)}{A(n_i)} = \frac{0}{M} = 0 .$$

$\{F_{n_i}\}$によって、Fはregularly exhaustible。 $\square$

Thm.2はThm.1よりただちに得られる。

Ahlforsの被覆面の理論について

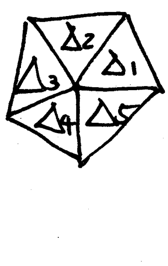
(遠木, 幾何学的函数論 共立出版から)

集合Δが$\mathbb{C}$−平面上の閉三角形にhomeo.であるとき、Δを三角形とよぶ。集合Fが次の条件をみたすような三角形の集合(Δ)に分割されるとき、Fは三角形分割可能であるといい、Fを面(surface)という。

i) (Δ)に属する三角形の各辺はちょうど二つの三角形に共通な辺となる。

ii) Δ, Δ'を(Δ)の任意の三角形とするとき、Δ, Δ'は、となり合った三角形の系列で連結できる。

iii) (Δ)の任意の三角形の一つの頂点を共有する三角形は有限コで、これに適当な順序をつけて、$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$であらわすとき、$\Delta_i$と$\Delta_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$及びΔ_nとΔ_1とがとなり合っている。



Fが有限コの三角形からなるとき．Fを<u>閉じた面</u>（closed surface）と言い．無限コの三角形からなるとき．<u>開いた面</u>（open surface）と言う。

集合Fが有限コの三角形に分割できて．境界辺及び境界辺上にある頂点を除いてⅰ）〜ⅲ）を満足するようにできるならば．Fを<u>有限面</u>と言う。ただし<u>境界辺</u>とは．ただ1つの三角形に属している辺のことである。

三角形分割された二つの有限面F_0及びFにおいて．次の条件1），2）をみたすFからF_0への写像が与えられているとき．FをF_0の<u>被覆面</u>（covering surface）といい．F_0をFの<u>基礎面</u>（basic surface）という。

1）Fの各三角形ΔにそれぞれF_0の1つの三角形Δ_0が位相的に（homeo.）対応している。

2）Fのとなり合った三角形Δ，Δ'の共通辺には．Δ，Δ'に対応するF_0の三角形Δ_0，Δ_0'の共通辺が対応する。

開いた被覆面：　F_1，…F_ν，…をそれぞれ基礎面F_0の有限な被覆面の系列とし．かつ$F_\nu \subsetneq F_{\nu+1}$（$\nu=1, 2, \cdots$）とするとき$F^* = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$とすれば．$F^*$から$F_0$への写像$f^*$も定まる。$F^*$を$F_0$の<u>開いた被覆面</u>といい．$\{F_\nu\}$を$F^*$のexhaustionという。

以下．基礎面はリーマン球$\hat{\mathbb{C}}$，計量はspherical metricとする。（$\hat{\mathbb{C}}$をunit sphere S^2：$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ in $\mathbb{R}^3$ と

同一視し．$ds^2=d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2$ をmetricとする。)

$F_1, \cdots, F_\nu, \cdots$ は$\hat{\mathbb{C}}$の有限な被覆面，$F_\nu \subset F_{\nu+1}$とする。このとき各F_νに$\hat{\mathbb{C}}$のspherical metricをliftすることによりmetricを導入する。$\hat{\mathbb{C}}$の全面積は4πである。F_νの全面積をA_νであらわす。$S_\nu=A_\nu/4\pi$をF_νの<u>平均枚数</u>とよぶ。F_νの相対境界の長さをL_νであらわす。ある開いた被覆面F^*において．次をみたすようなexhaustion $\{F_\nu\}$が存在するとき、F^*は<u>regularly exhaustible</u>であるという。

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{L_\nu}{S_\nu}=0 .$$

特にexhaustionに属する各面が単連結である場合については．F^*の性質について多くの結果が得られている。

(Nevanlinna, Analytic Functions, Springer-Verlag等参照。)